

EVALUAREA NAȚIONALĂ PENTRU ABSOLVENȚII CLASEI a VIII-a  
Matematică

Test 19

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 2 ore.

SUBIECTUL I - Pe foaia de examen scrieți numai rezultatele.

(30 de puncte)

- 5p 1. Rezultatul calculului  $2^2 \cdot 4 - 16$  este egal cu ... .
- 5p 2. Prețul unei cărți este 30 de lei. După o ieftinire cu 10%, prețul cărții va fi ... de lei.
- 5p 3. Dacă  $n$  este singurul număr natural din intervalul  $(5, n]$ , atunci  $n$  este egal cu ... .
- 5p 4. Triunghiul echilateral  $MNP$  are  $MN = 10$  cm. Perimetrul triunghiului  $MNP$  este egal cu ... cm.
- 5p 5. În Figura 1 este reprezentat un cub  $ABCD A' B' C' D'$ . Suma lungimilor muchiilor care au în comun vârful  $B$  este egală cu 15 cm. Lungimea muchiei  $AB$  este egală cu ... cm.

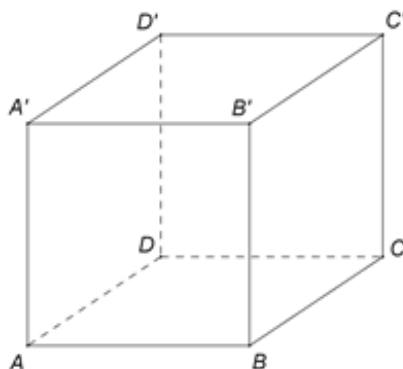
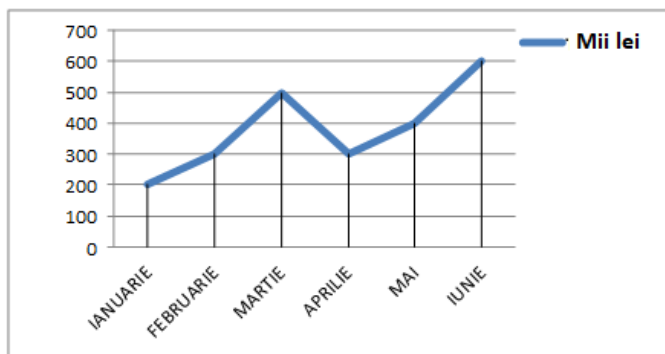


Figura 1

- 5p 6. În diagrama următoare sunt prezentate încasările unei firme, în mii lei, înregistrate în fiecare dintre primele șase luni ale unui an.



Conform informațiilor din diagramă, suma încasărilor din primele două luni ale anului este egală cu ... mii lei.

SUBIECTUL al II-lea - Pe foaia de examen scrieți rezolvările complete.

(30 de puncte)

- 5p 1. Desenați, pe foaia de examen, o piramidă patrulateră  $VABCD$ , cu vârful în  $V$ .
- 5p 2. Arătați că, pentru orice număr natural  $n$ , numărul natural  $N = 5 \cdot 7^n - 3 \cdot 7^{n+1} + 7^{n+2}$  este divizibil cu 11.
- 5p 3. Dacă dintr-un număr real  $x$  scădem, pe rând, numerele 3, 10 și respectiv 11, obținem trei numere a căror sumă este egală cu  $x$ . Determinați numărul real  $x$ .
4. Se consideră  $A = \left\{ x \in \mathbb{N} \mid 2(x-4) - 2(1-x) \leq (3-\sqrt{3})(3+\sqrt{3}) \right\}$  și  $B = \left\{ x \in \mathbb{Z} \mid |x| < 2(3-\sqrt{12}) - (2-\sqrt{48}) \right\}$ .
- 5p a) Arătați că  $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ .
- 5p b) Determinați suma elementelor mulțimii  $A \cap B$ .

- 5p 5. Se consideră expresia  $E(x, y) = (x-4)(x-2) + (y-1)(y-3) + 3$ , unde  $x$  și  $y$  sunt numere reale. Demonstrați că  $E(x, y) \geq 1$ , pentru orice numere reale  $x$  și  $y$ .

**SUBIECTUL al III-lea - Pe foaia de examen scrieți rezolvările complete.**

**(30 de puncte)**

1. În Figura 2 este reprezentat un pătrat  $ABCD$  cu  $AB = 6$  cm. Punctele  $E$ ,  $F$ ,  $G$  și  $H$  sunt situate pe laturile  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$ , respectiv  $DA$ , astfel încât  $AE = BF = CG = DH$ .

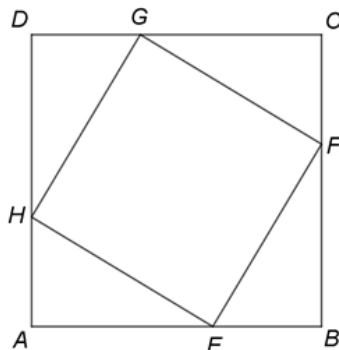


Figura 2

- 5p a) Arătați că aria pătratului  $ABCD$  este egală cu  $36 \text{ cm}^2$ .
- 5p b) Demonstrați că dreptele  $EG$  și  $HF$  sunt perpendiculare.
- 5p c) Calculați măsura unghiului  $BMF$ , unde  $M$  este punctul de intersecție a dreptelor  $AF$  și  $BG$ .
2. În Figura 3 este reprezentat un triunghi echilateral  $ABC$  cu  $AB = 8$  cm. Punctele  $M$  și  $N$  sunt mijloacele laturilor  $AB$ , respectiv  $AC$  și dreapta  $AD$  este perpendiculară pe planul  $(BDC)$ ,  $AD = 4\sqrt{2}$  cm.

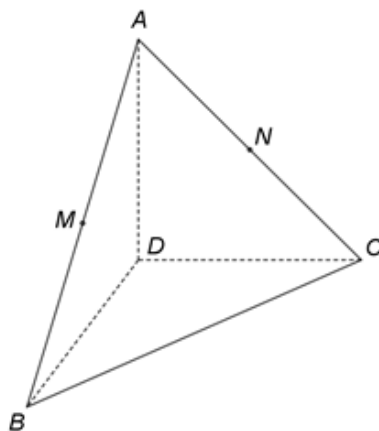


Figura 3

- 5p a) Arătați că aria triunghiului  $ABC$  este egală cu  $16\sqrt{3} \text{ cm}^2$ .
- 5p b) Demonstrați că triunghiul  $DMN$  este echilateral.
- 5p c) Determinați sinusul unghiului dintre dreapta  $CM$  și planul  $(ABD)$ .

## TEST 19: - REZOLVARE

SUBIECTUL I: 1)  $2^2 \cdot 4 - 16 = 4 \cdot 4 - 16 = 16 - 16 = 0$ .

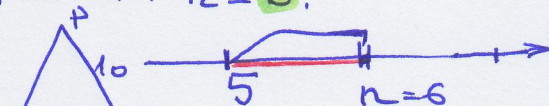
2)  $100\% - 10\% = 90\%$ . (90% din 30 lei) =  $\frac{90}{100} \cdot 30 = 27$  (lei).

3)  $n \in \mathbb{N}$ ;  $n$  este singurul nr. din  $(5; n]$ , atunci  $n = 6$ .

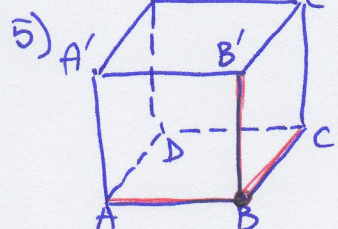
4)  $\triangle MNP$ : echilateral

$MN = 10 \text{ cm}$ ;

$\Rightarrow MN = NP = PM = 10 \text{ cm}$ .



$\text{Perimetrul } \triangle MNP = MN + NP + PM = 3 \cdot 10 = 30 \text{ (cm)}.$

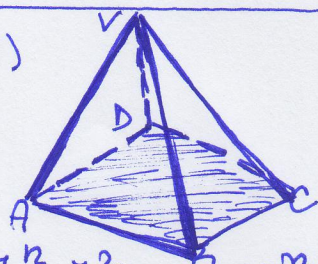


$AB + BB' + BC = 15 \text{ cm} \Rightarrow AB' = 15 : 3 = 5 \text{ (cm)}.$   
 $AB = BB' = BC$

6) Ianuarie: 200 mii lei; Februarie 300 mii lei  $\Rightarrow 200 + 300 = 500$  (mii lei)

## SUBIECTUL al II-lea:

1)



$$7^{n+1} = 7^n \cdot 7$$

$$7^{n+2} = 7^n \cdot 7^2$$

2)  $N = 5 \cdot 7^n - 3 \cdot 7^n \cdot 7 + 7^n \cdot 7^2 = 7^n (5 - 3 \cdot 7 + 7^2) =$   
 $= 7^n (5 - 21 + 49) = 7^n \cdot 33 = 11 \cdot 3 \cdot 7^n$ , deci  $N : 11$ , pentru orice  $n \in \mathbb{N}$ .

3) Avem ecuația  $(x-3) + (x-10) + (x-11) = x \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x - 3 + x - 10 + x - 11 = x \Leftrightarrow 3x - 24 = x \Leftrightarrow 3x - x = 24 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x = 24 \Leftrightarrow x = 24 : 2 \Leftrightarrow x = 12. \text{ Deci nr. căutat este } x = 12.$$

4.)  $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 2(x-4) - 2(1-x) \leq (3-\sqrt{3})(3+\sqrt{3})\}$

a) Inecuația din definiția lui A este echivalentă cu:

$$2x - 8 - 2 + 2x \leq 9 - 3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4x \leq 6 + 8 + 2 \Leftrightarrow 4x \leq 16 \Leftrightarrow x \leq \frac{16}{4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \leq 4 \quad \left. \begin{matrix} x \in \mathbb{N} \end{matrix} \right\} \Rightarrow x \in \{0; 1; 2; 3; 4\} = A.$$

Deci  $A = \{0; 1; 2; 3; 4\}$ , g. c. d.

b)  $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| < 2(3-\sqrt{12}) - (2-\sqrt{48})\}$

Inegalitatea din definiția lui B este echivalentă cu:

$$|x| < 6 - 2 \cdot 2\sqrt{3} - 2 + 4\sqrt{3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |x| < 6 - 4\sqrt{3} - 2 + 4\sqrt{3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |x| < 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in (-4; 4). \quad B = (-4; 4) \cap \mathbb{Z} = \{-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3\}$$

Deci  $A \cap B = \{0; 1; 2; 3\}$  și suma elem. lui  $A \cap B$  este  $0 + 1 + 2 + 3 = 6$ .

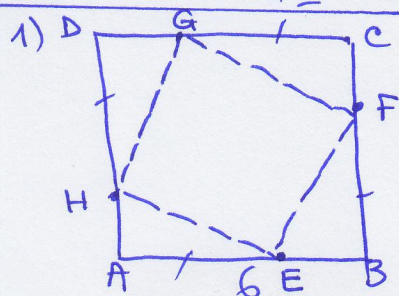
5)  $E(x; y) = (x-4)(x-2) + (y-1)(y-3) + 3, x, y \in \mathbb{R}.$

$$\begin{aligned} E(x; y) &= x^2 - 2x - 4x + 8 + y^2 - 3y - y + 3 + 3 = \\ &= x^2 - 6x + 8 + y^2 - 4y + 6 = \\ &= x^2 - 6x + 9 + y^2 - 4y + 4 + 1 = \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} 8+6=14 \\ 9+4+1=14 \end{array} \right\}$$

$$= \underbrace{(x-3)^2}_{\geq 0} + \underbrace{(y-2)^2}_{\geq 0} + 1.$$

$$\left. \begin{array}{l} (x-3)^2 \geq 0 \text{ pentru orice } x \in \mathbb{R} \\ (y-2)^2 \geq 0 \text{ pentru orice } y \in \mathbb{R} \end{array} \right\} \Rightarrow E(x; y) \geq 1 \text{ pentru orice } x, y \in \mathbb{R}. \quad \text{g.e.d.}$$

SUBIECTUL al III-lea.

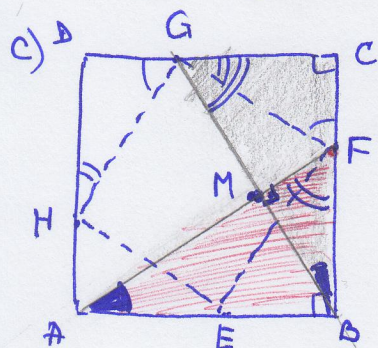


a)  $\mathcal{A}_{\square} = a^2$ ;  $\mathcal{A}_{ABCD} = AB^2 = 6^2 = 36 \text{ (cm}^2\text{)}, \text{ g.e.d.}$

b)  $\triangle AEH \equiv \triangle BFE \equiv \triangle CGF \equiv \triangle DHG \text{ (c.c.)}$

$$\left( \begin{array}{l} AB = BC = CD = AD \\ BF = CG = DH = AE \end{array} \right) \Rightarrow \left. \begin{array}{l} AH = FC = GD = EB \\ \Rightarrow EF = FG = GH = HE \end{array} \right\} \Rightarrow \text{EF GH: romb} \Rightarrow EG \perp HF.$$

(diagonalele unui romb sunt perpend.)



$$\left. \begin{array}{l} \triangle CGB \equiv \triangle BFA \text{ (c.c.)} \\ \left\{ \begin{array}{l} \text{dreptunghiice} \\ CG = BF \\ BC = AB \end{array} \right. \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} m(\widehat{CBG}) = m(\widehat{BAF}) \\ m(\widehat{GCB}) = m(\widehat{FBA}) \end{array}$$

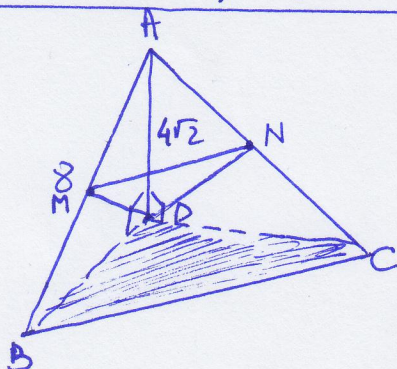
Dar  $m(\widehat{CBG}) + m(\widehat{GCB}) = 90^\circ$  în atunci

$$m(\widehat{CBG}) + m(\widehat{BAF}) = 90^\circ,$$

iar asta înseamnă că  $m(\widehat{BMF}) = 90^\circ$ , dacă ne uităm în  $\triangle MBF$  (în care suma este  $180^\circ$ ).

Deci  $m(\widehat{BMF}) = 90^\circ$ .

2)



a)  $\mathcal{A}_{\Delta ech.} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$ ;  $\mathcal{A}_{\Delta ABC} = \frac{AB^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{8^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{64 \sqrt{3}}{4} = 16 \sqrt{3} \text{ (cm}^2\text{)} \quad \text{g.e.d.}$

b) Se înțelege că  $\triangle ABC$  se „înclină” până când  $AD' = 4\sqrt{2} \text{ cm}$

$$AD \perp (DBC) \Rightarrow AD \perp DC.$$

DCC(DBC) În  $\triangle ADC$ , dreptunghiic în  $\hat{D}$ ,

avem DN: mediană  $\Rightarrow DN = \frac{AC}{2} = \frac{8}{2} = 4 \text{ (cm.)}$

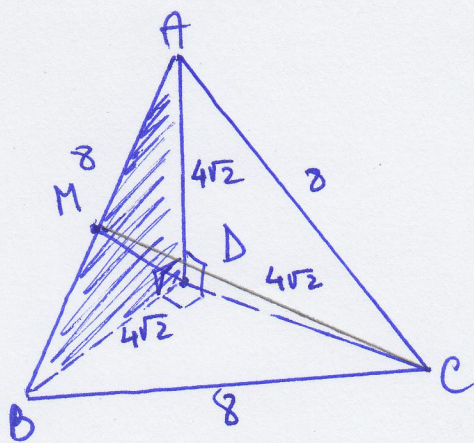
Analog,  $AD \perp (DBC)$   $\Rightarrow AD \perp DB$  și în  $\triangle ADB$ , dreptunghiic DBC(DBC)  $\Rightarrow DM = \frac{AB}{2} = \frac{8}{2} = 4 \text{ (cm.)}$

În D, avem DM: mediană  $\Rightarrow DM = \frac{AB}{2} = \frac{8}{2} = 4 \text{ (cm.)}$

[MN]: linie mijlocie în  $\triangle ABC \Rightarrow MN = \frac{BC}{2} = \frac{8}{2} = 4 \text{ (cm.)}$

$\Rightarrow DM = DN = MN = 4 \text{ cm}$ , deci  $\triangle DMN$ : echilateral, g.e.d.

c)



$$\left. \begin{array}{l} AD \perp (BCD) \\ BD \subset (BCD) \\ CD \subset (BCD) \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} AD \perp CD \\ AD \perp BD \end{array}$$

$$\Delta ADC \equiv \Delta ADB \text{ (C.I.)} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{dreptunghiice} \\ [AD]: \text{catetă comună} \\ AC = AB = 8 \text{ cm} \end{array} \right.$$

$\Rightarrow BD = DC$ , iar cu T.P. se calculează

$$\text{În } \Delta DBC: AB^2 + DC^2 = BC^2 \text{ pt. că } (4\sqrt{2})^2 + (4\sqrt{2})^2 = 8^2 \Leftrightarrow 32 + 32 = 64 \text{ (A), deci } \Delta DBC: \text{dreptunghiic (isoscel), cu } m(\widehat{BDC}) = 90^\circ.$$

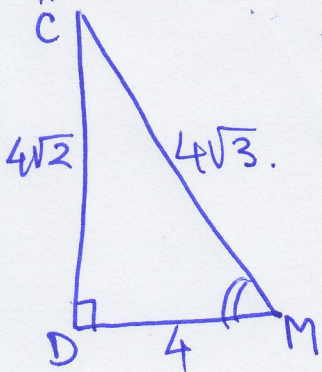
$$\text{Avem atunci } \left\{ \begin{array}{l} CD \perp DA \\ CD \perp DB \end{array} \right\} \Rightarrow CD \perp (ADB).$$

Unghiul dintre o dreaptă și un plan are măsura egală cu a unghiului format de dreaptă cu proiecția ei pe plan.

Din faptul că  $CD \perp (ABD)$  și  $M \in (ABD) \Rightarrow$  proiecția dreptei CM pe

planul  $(ABD)$  este DM.

$$\text{Atunci } m(\widehat{CM}; (ABD)) = m(\widehat{CM}; DM) = m(\widehat{CMD}).$$



$$\text{În } \Delta CDM \text{ dreptunghiic în } \widehat{D} \left( \begin{array}{l} CD \perp (ABD) \\ DM \subset (ABD) \end{array} \right) \Rightarrow \underline{\underline{CD \perp DM}}$$

avem:

$$DM = \frac{AB}{2} = \frac{8}{2} = 4 \text{ (cm)} \text{ (mediana e } \frac{1}{2} \text{ din ipotenuză)}$$

$$\text{Cu T.P. avem } CM^2 = DM^2 + DC^2 = 4^2 + (4\sqrt{2})^2 = 4^2 + 4^2 \cdot 2 = 4^2 \cdot 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow CM = \sqrt{4^2 \cdot 3} = 4\sqrt{3}$$

$$\sin(\widehat{CMD}) = \frac{CD}{CM} = \frac{4\sqrt{2}}{4\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

$$\text{Deci } \sin[\widehat{CM}; (ABD)] = \sin(\widehat{CMD}) = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

**EVALUAREA NAȚIONALĂ PENTRU ABSOLVENȚII CLASEI a VIII-a**

**Matematică**

**BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE**

**Test 19**

- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total obținut pentru lucrare.

**SUBIECTUL I**

- Se punctează doar rezultatul, astfel: pentru fiecare răspuns se acordă fie 5 puncte, fie 0 puncte.
- Nu se acordă punctaje intermediare.

**SUBIECTUL al II-lea și SUBIECTUL al III-lea**

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.

**SUBIECTUL I**

**(30 de puncte)**

|    |     |    |
|----|-----|----|
| 1. | 0   | 5p |
| 2. | 27  | 5p |
| 3. | 6   | 5p |
| 4. | 30  | 5p |
| 5. | 5   | 5p |
| 6. | 500 | 5p |

**SUBIECTUL al II-lea**

**(30 de puncte)**

|    |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           |                      |
|----|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------|
| 1. | Desenează piramida patrulateră<br>Notează piramida patrulateră $VABCD$ , cu vârful în $V$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 | 4p<br>1p             |
| 2. | $N = 7^n (5 \cdot 1 - 3 \cdot 7 + 7^2) =$<br>$= 7^n \cdot 33$ , care este divizibil cu 11, pentru orice număr natural $n$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 | 3p<br>2p             |
| 3. | $(x-3) + (x-10) + (x-11) = x$<br>$x = 12$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 | 3p<br>2p             |
| 4. | a) $2(x-4) - 2(1-x) \leq (3-\sqrt{3})(3+\sqrt{3}) \Rightarrow 2x-8-2+2x \leq 3^2 - (\sqrt{3})^2 \Rightarrow 4x-10 \leq 6$<br>$x \leq 4$ și, cum $x$ este număr natural, obținem $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$<br>b) $ x  < 2(3-2\sqrt{3}) - (2-4\sqrt{3}) \Rightarrow  x  < 6-4\sqrt{3}-2+4\sqrt{3} \Rightarrow  x  < 4$ și $x \in \mathbb{Z} \Rightarrow B = \{-3, -2, \dots, 3\}$<br>$A \cap B = \{0, 1, 2, 3\}$ , deci suma elementelor mulțimii $A \cap B$ este $0+1+2+3=6$ | 3p<br>2p<br>3p<br>2p |
| 5. | $E(x, y) = x^2 - 6x + 8 + y^2 - 4y + 3 + 3 = x^2 - 6x + 9 + y^2 - 4y + 4 + 1 = (x-3)^2 + (y-2)^2 + 1$ , pentru orice numere reale $x$ și $y$<br>Pentru orice numere reale $x$ și $y$ , $(x-3)^2 \geq 0$ și $(y-2)^2 \geq 0$ , deci $E(x, y) \geq 1$                                                                                                                                                                                                                       | 3p<br>2p             |

**SUBIECTUL al III-lea**

**(30 de puncte)**

|    |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           |          |
|----|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------|
| 1. | a) $\mathcal{A}_{ABCD} = AB^2 =$<br>$= 6^2 = 36 \text{ cm}^2$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             | 2p<br>3p |
|    | b) $AE = BF$ , $AH = BE$ și $m(\angle HAE) = m(\angle EBF) = 90^\circ \Rightarrow \triangle AEH \equiv \triangle BFE$ , deci $EH = FE$ ;<br>$BF = CG$ , $BE = CF$ și $m(\angle EBF) = m(\angle FCG) = 90^\circ \Rightarrow \triangle BFE \equiv \triangle CGF$ , deci $FE = GF$<br>$CG = DH$ , $CF = DG$ și $m(\angle FCG) = m(\angle GDH) = 90^\circ \Rightarrow \triangle CGF \equiv \triangle DHG$ , deci $GF = HG$ ;<br>obținem $EH = FE = GF = HG$ , deci $EFGH$ este romb $\Rightarrow EG \perp HF$ | 2p<br>3p |

|           |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |                                   |
|-----------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------|
|           | <p><b>c)</b> <math>AB = BC</math>, <math>BF = CG</math> și <math>m(\angle ABF) = m(\angle BCG) = 90^\circ \Rightarrow \triangle ABF \equiv \triangle BCG</math></p> <p><math>m(\angle CBG) + m(\angle CGB) = 90^\circ</math> și <math>\angle AFB \equiv \angle BGC</math>, deci <math>m(\angle CBG) + m(\angle AFB) = 90^\circ</math>, de unde obținem <math>m(\angle BMF) = 180^\circ - (m(\angle FBM) + m(\angle MFB)) = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ</math></p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                | <p><b>2p</b></p> <p><b>3p</b></p> |
| <b>2.</b> | <p><b>a)</b> <math>\triangle ABC</math> este echilateral, deci <math>\mathcal{A}_{\triangle ABC} = \frac{AB^2 \sqrt{3}}{4} =</math></p> <p><math>= \frac{64\sqrt{3}}{4} = 16\sqrt{3} \text{ cm}^2</math></p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         | <p><b>3p</b></p> <p><b>2p</b></p> |
|           | <p><b>b)</b> <math>AD \perp (BCD)</math> și <math>DB, DC \subset (BCD) \Rightarrow AD \perp DB</math> și <math>AD \perp DC</math>, deci <math>DM</math> este mediană în triunghiul dreptunghic <math>ADB</math> și <math>DN</math> este mediană în triunghiul dreptunghic <math>ADC</math>, de unde obținem <math>DM = \frac{AB}{2} = 4 \text{ cm}</math> și <math>DN = \frac{AC}{2} = 4 \text{ cm}</math></p> <p><math>MN</math> linie mijlocie în <math>\triangle ABC</math>, deci <math>MN = \frac{BC}{2} = 4 \text{ cm}</math>, de unde obținem <math>DM = DN = MN</math>, deci <math>\triangle DMN</math> este echilateral</p>                                                                                                                                  | <p><b>2p</b></p> <p><b>3p</b></p> |
|           | <p><b>c)</b> <math>\triangle ADB</math> dreptunghic în <math>D</math>, deci <math>BD = \sqrt{AB^2 - AD^2} = 4\sqrt{2} \text{ cm}</math> și <math>\triangle ADC</math> dreptunghic în <math>D</math>, deci <math>CD = \sqrt{AC^2 - AD^2} = 4\sqrt{2} \text{ cm} \Rightarrow BD^2 + DC^2 = BC^2</math>, deci <math>\triangle BDC</math> dreptunghic în <math>D</math></p> <p><math>CD \perp DA</math>, <math>CD \perp DB</math> și <math>DA \cap DB = \{D\} \Rightarrow CD \perp (ABD) \Rightarrow \angle(CM, (ABD)) = \angle CMD</math> și, cum <math>\triangle CDM</math> este dreptunghic în <math>D</math> și <math>CM = 4\sqrt{3} \text{ cm}</math>, obținem <math>\sin(\angle CMD) = \frac{CD}{CM} = \frac{4\sqrt{2}}{4\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}</math></p> | <p><b>2p</b></p> <p><b>3p</b></p> |